Podstawy fizyki kwantowej

Lista zadań 4 – Spin

Andrzej Więckowski

Macierze Pauliego można przedstawić w następującej postaci:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Definicja operatora spinu: $S^i = \frac{1}{2}\hbar\sigma_i$. Rozważamy cząstki o spinie $S = \frac{1}{2}$.

1. Pokazać, że:
   (a) $\mathrm{Tr}(\sigma_i) = 0$;
   (b) $\det(\sigma_i) = -1$;
   (c) $-i\sigma_x\sigma_y\sigma_z = \mathbb{1}$.
2. Sprawdzić następujące relacje:
   (a) $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon^{ijk}\sigma_k$;
   (b) $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$.
3. Udowodnić, że $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon^{ijk}\sigma_k$.
4. Pokazać, że $S^2 = \frac{3}{4} = S(S+1)$.
5. Definiujemy operatory drabinkowe $S^\pm = S^x \pm iS^y$, pokazać, że;
   (a) $[S^+, S^-] = 2S^z$;
   (b) $[S^z, S^\pm] = \pm S^\pm$;
   (c) $S^2 = \vec{S}\cdot\vec{S} = (S^x)^2 + (S^y)^2 + (S^z)^2 = \frac{1}{2}(S^+S^- + S^-S^+) + (S^z)^2$.
6. Stany $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$ są stanami własnymi operatora S^z. Sprawdzić działanie $S^\pm$ na $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$.
7. Układ jest opisany danym hamiltonianem $\hat{H} = \Delta S^x + J\,(S^+S^- + S^-S^+)$:
   (a) Wyznaczyć energie oraz stany własne tego hamiltonianu;
   (b) Rozwiązać równanie Schrödingera $\hat{H}|\psi(t)\rangle = i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi(t)\rangle$, gdzie warunki początkowe $|\psi\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$ to: $|\psi(t=0)\rangle = |\uparrow\rangle$ (podpowiedź: aby rozwikłać układ równań różniczkowych policz pochodną jednego równania, aby otrzymać drugą pochodną $\ddot{a}$, a następnie dokonaj podstawienia $a = \mathrm{e}^{\lambda t}$).