Podstawy fizyki kwantowej

Lista zadań 3 – Oscylator harmoniczny

Andrzej Więckowski

Hamiltonian oscylatora harmonicznego: $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$, $k = m\omega^2$. Dla układu opisanym następującym hamiltonianem rozwiązać zadania:

1. Pokazać, że energie własne $E_n > 0$ (podpowiedź: $[x,p] \neq 0$);
2. Zdefiniujmy operatory kreacji i anihilacji: $a^\dagger = -\frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p + im\omega x)$, $a = \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p - im\omega x)$:
   (a) wyrazić hamiltonian za pomocą $a, a^\dagger$: $H = (a^\dagger a + \frac{1}{2})\hbar\omega$;
   (b) sprawdzić, że $[a, a^\dagger] = 1$;
   (c) zdefiniujmy $N = a^\dagger a$ i pokażmy, że: $[N,a] = -a$, $[N,a^\dagger] = a^\dagger$, $[H,a] = -\hbar\omega a$, $[H,a^\dagger] = \hbar\omega a^\dagger$;
   (d) $|n\rangle$ jest stanem własnym oscylatora, sprawdzić jakie jest działanie operatorów kreacji anihilacji na ten stan: $a|n\rangle$, $a^\dagger|n\rangle$;
3. Definiujemy stan podstawowy $|0\rangle$: $a|0\rangle$=0, ile wynosi E_0? Ile wynosi E_n?;
4. Przedstawić operatory $a, a^\dagger, x, p$ w postaci macierzy w reprezentacji energetycznej;
5. Znaleźć funkcję falową dla stanu podstawowego, pokazać jak generować funkcje dla n-tego stanu.
6. Policzyć $\langle x\rangle$, $\langle p\rangle$ w stanie $|n\rangle$.
7. Policzyć $\langle x\rangle$ dla superpozycji stanów $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, jak to się zmienia w czasie? Policzyć średnią $\langle \bar{x}\rangle = \int\limits_0^{T=2\pi/\omega} \mathrm{d}t \, \langle x(t)\rangle$.