Podstawy fizyki kwantowej

Lista zadań 1c – Aparat matematyczny

Andrzej Więckowski

1. Dane są dwie ortonormalne bazy $\{|a_i\rangle\}$ oraz $\{|\tilde{a}_i\rangle\}$. Wiadomo, że można przejść z jednej do drugiej za pomocą operatora U: $|a_i\rangle = U|\tilde{a}_i\rangle$. Znaleźć postać operatora U oraz pokazać, że jest to operator unitarny. Dowolny operator A w bazie a_i można przedstawić w następującej postaci: $A = \sum_i \sum_j \langle a_i|A|a_j\rangle |a_i\rangle\langle a_j|$. Znaleźć postać operatora A w bazie $\tilde{a}_i$.

2. Operator w bazie $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ ma postać: $a|0\rangle\langle 0| + b|1\rangle\langle 0| + c|0\rangle\langle 1| + d|1\rangle\langle 1|$. Znaleźć postać operatora w bazie $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\}$. Przedstawić operator jako kombinację macierzy Pauliego: $\{\mathbb{1}, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$.

3. Określić jak działa operator $\hat{\mathscr{O}}$ na funkcje falową $\psi(x)$. Skorzystaj z definicji $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$. Obliczyć działanie dla $\hat{\mathscr{O}} = \hat{x}$.

4. Znaleźć elementy macierzowe (baza położeniowa) operatora pędu: $\langle x|\hat{p}|x'\rangle$. Podpowiedź: skorzystaj z $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$ oraz znanej tożsamości z teorii dystrybucji $\delta_{ij}\delta(x_i) = -x_i \frac{\partial}{\partial x_j}\delta(x_i)$. Analogicznie oblicz elementy macierzowe: $\langle x|\hat{p}^2|x'\rangle$.

5. Pokazać, że: $\hat{p}|\psi\rangle = \int \mathrm{d}x |x\rangle(-i\hbar)\frac{\partial}{\partial x}\psi(x)$. Policzyć $\langle x|\hat{p}|\psi\rangle$ (działanie operatora pędu na funkcję falową). Analogicznie wyznaczyć $\langle x|\hat{p}^2|\psi\rangle$.

6. Z fundamentalnego równania Schrödingera $i\hbar\partial_t|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$, wyprowadzić dla hamiltonianu $\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ równanie falowe: $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \left(-\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\psi(x,t)$.