

## Lista zadań 1b – Aparat matematyczny

Andrzej Więckowski, Krzysztof Gawarecki

1. Udowodnić nierówność Schwarz:  $|\langle x|y\rangle|^2 \leq \langle x|x\rangle\langle y|y\rangle$ .
2. Pokazać, że jeżeli dla operatorów  $A, B, C$  spełniona jest następująca relacja:  $[A, B] = iC$  oraz  $A = A^\dagger, B = B^\dagger$ , to  $\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2}|\langle C \rangle|$ , gdzie:  $\Delta A = \sqrt{(A - \langle A \rangle)^2}$  i  $\langle \cdot \rangle$  to wartość oczekiwana.
3. Znaleźć funkcje własne operatora położenia  $\hat{x}$ .
4. Znaleźć funkcje własne operatora pędu  $\hat{p}$ .
5. Pokazać, że dla fali  $\psi(\vec{r}, t) = N \exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)]$ , całka normalizacyjna nie istnieje.
- 6\* Pokazać, że  $\forall \psi \in \mathcal{H} \langle \psi|A|\psi \rangle = \langle \psi|B|\psi \rangle \rightarrow \forall \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{H} \langle \phi_1|A|\phi_2 \rangle = \langle \phi_1|B|\phi_2 \rangle \quad (A = B)$ .
7. Udowodnić, że:

(a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \text{gdzie } \alpha \in \mathbb{R};$$

(b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha^{3/2}}, \quad \text{gdzie } \alpha \in \mathbb{R}.$$

8. Funkcja falowa pewnej cząstki jest określona przez  $\psi(x) = N e^{-\alpha x^2}$ .
  - (a) Wyznaczyć stałą normalizacyjną  $N$ ;
  - (b) Znaleźć reprezentację pędową  $\tilde{\psi}(p_x)$  funkcji falowej;
  - (c) Obliczyć średnią wartość położenia  $\langle x \rangle$ , pędu  $\langle p_x \rangle$  oraz ich odchylenia standardowe  $\langle \sigma_x \rangle, \langle \sigma_{p_x} \rangle$ .