

Podstawy fizyki kwantowej

Lista zadań 1a – Aparat matematyczny

Andrzej Więckowski

1. Pokazać, że wartości własne operatorów hermitowskich są liczbami rzeczywistymi.
2. Pokazać $(\langle n|m \rangle)^* = \langle m|n \rangle$ oraz $(\langle n|A|m \rangle)^* = \langle m|A^\dagger|n \rangle$.
3. Unormować stany: $|\psi\rangle = |0\rangle - i|1\rangle$, $|\phi\rangle = 3i|0\rangle - |1\rangle$ ($|0\rangle, |1\rangle$ są unormowane).
4. Definiujemy komutator operatorów $[A, B] = AB - BA$ oraz antykomutator $\{A, B\} = AB + BA$. Pokazać następujące związki (anty-)komutacyjne:
 - (a) $[\alpha A + \beta B, C] = \alpha[A, C] + \beta[B, C]$, gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ to stałe;
 - (b) $[A, B] = -[B, A]$, $\{A, B\} = \{B, A\}$;
 - (c) $[\alpha, A] = 0$, gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$ to stała;
 - (d) $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$;
 - (e) $[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B$.
 - (f) $[A, B] = 0 \rightarrow [f(A), B] = 0$.
5. Policzyc komutatory operatora położenia $\hat{x}_i = x_i$ oraz pędu $\hat{p}_i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i}$ (uwaga, czasami będą pomijać symbol $\hat{\cdot}$):
 - (a) $[\hat{x}_i, \hat{x}_j]$, $[\hat{p}_i, \hat{p}_j]$;
 - (b) $[\hat{x}_i, \hat{p}_j]$, $[\hat{x}_i, \hat{p}_j^2]$.
6. Pokazać, że jeśli $[A, B] = 0$, to operatory mają wspólne stany własne.
7. Pokazać hermitowskość operatora \hat{p}_i . (★ pokazać bez całkowania)
8. Policzyc komutatory dla orbitalnego momentu pędu $L_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k$:
 - (a) $[L_i, x_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} x_k$;
 - (b) $[L_i, p_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} p_k$;
 - (c) $[L_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k$;
 - (d) $[L_i, \vec{L}^2] = 0$.